JčU - Cvičení z matematiky pro zemědělské obory (doc. RNDr. Nýdl, CSc & spol.)

Minitest MT1

1. Porovnejte mezi sebou normy zadaných vektorů
$\vec{p}=(1,-3)$, $\vec{q}=(2,-2,2)$, $\vec{r}=(0,1,2,2)$.
(A) $\|\vec{p}\| < \|\vec{q}\| < \|\vec{r}\|$ (B) $\|\vec{q}\| < \|\vec{r}\| < \|\vec{p}\|$
(C) $\|\vec{r}\| < \|\vec{q}\| < \|\vec{p}\|$ (D) $\|\vec{r}\| < \|\vec{p}\| < \|\vec{q}\|$
(E) žádný z uvedených vztahů není správný

Norma neboli velikost je (v našem případě) definována pro vektor dimenze 2 takto: $\sqrt{x^2+y^2}$,
pro vektor dimenze 3 takto: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
pro vektory dimenze 4 takto: $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$ atd.

Takže dosazujeme a počítáme:

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},$$

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{2^2+(-2^2)+2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12},$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{0^2+1^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9}$$

... schválně to nedopočítávám, a to kvůli tomu potřebnému porovnání.

Vždycky platí, že čím větší je číslo x, tím větší je jeho odmocnina $\sqrt{x}$ (a také obráceně, čím větší odmocnina, tím větší číslo, ze kterého se počítala). A protože je tedy $9 < 10 < 12$, platí také:

$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{12}$, jt.:

$\|\vec{r}\| < \|\vec{p}\| < \|\vec{q}\|$, což je možnost (D).

---

2. Ve V_3 jsou dány vektory $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,2,3)$. Vypočtěte hodnotu skalárního součinu
$(3\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 5\vec{v})$.
(A) -101 (B) -102 (C) -103 (D) -104
(E) -105

Sčítání a odčítání vektorů děláme po složkách, u skalárního součinu vynásobíme také příslušné složky a výsledky posčítáme. Násobení číslem je podobné roznásobování závorky. Prostě vynásobíme všechny složky.

Počítáme napřed první závorku:

$3\vec{u} = 3.(1,-1,2) = (3,-3,6)$

$3\vec{u} + \vec{v} = (3,-3,6) + (0,2,3) = (3,-1,9)$

Teď druhou závorku:

$5\vec{v} = 5.(0,2,3) = (0,10,15)$

$\vec{u} - 5\vec{v} = (1,-1,2) - (0,10,15) = (1,-11,-13)$

Celý příklad:

$(3\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 5\vec{v}) = (3,-1,9).(1,-11,-13) = 3.1 + (-1).(-11) + 9.(-13) = 3 + 11 - 117 = \underline{\underline{-103}}$ (C)

---

3. Najděte všechny hodnoty čísla x, pro něž jsou vektory $\vec{a} = (1,-1,x,2)$, $\vec{b} = (5,4,x,x)$ ortogonální.

(A) žádné x (B) pouze $x = 0$ (C) pouze $x = -1$
(D) $x = -1$ nebo $x = 1$ (E) žádná z uvedených odpově odpovědí není správná

Použijeme poučku (nebo spíše definici): 2 vektory jsou navzájem ortogonální neboli kolmé, když jejich skalární součin je nulový. Takže uděláme ten skalární součin, položíme ho roven nule. Tak dostaneme nějakou rovnici pro x, jejíž řešení jsou řešeními příkladu:

$$\vec{a}.\vec{b} = (1,-1,x,2).(5,4,x,x) = 1.5 + (-1).4 + x.x + 2.x =$$
$$= 5 - 4 + x^2 + 2x = \mathbf{1 + x^2 + 2x}$$

$\vec{a}.\vec{b} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + x^2 + 2x = 0$ / přerovnat

$\mathbf{x^2 + 2x + 1 = 0}$ / klasická kvadratická rovnice, takže příslušný vzoreček:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} =$$
$$= \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

Vyšla možnost (C).

---

4. V prostoru dány body $A = [1,-1,0]$, $B = [-3,1,1]$, $C = [2,1,9]$. Určete velikost úhlu β v $\triangle ABC$ a zaokrouhlete ji na celé stupně.

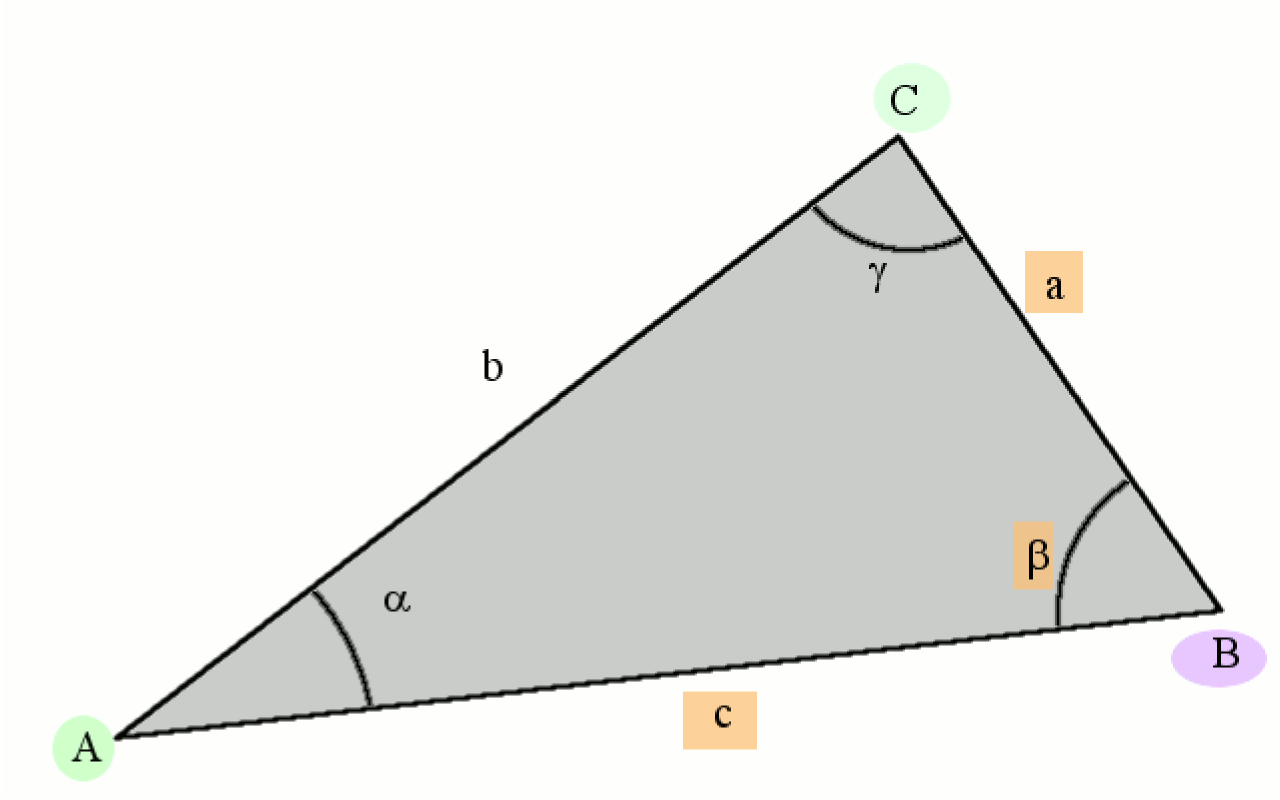
(A) 70° (B) 71° (C) 72° (D) 73°
(E) 74°

Šalamounský návod zní kouzelně:
Je na to vzoreček, stačí dosadit. Ó, jaká jednoduchost, jaká elegance! Jen škoda, že nám ve vzduchu zůstaly viset 2 vlezlé otázky:

1) Do čeho budeme dosazovat?

2) Co vlastně budeme dosazovat?

Odpovím napřed na druhou otázku. Proč? Inu, jak to píšu, ještě nevím, jaká písmenka do toho vzorečku dát, abych si nenamíchal příliš pestrý písmenkový koktejl.
Co tedy vlastně budeme dosazovat?
Odpověď není příliš překvapivá: Souřadnice vektorů. Jak k nim přijdeme? Přece pomocí obrázku a analytické geometrie.



Tolik obrázek, teď ta analytická geometrie. Ze stran trojúhelníka si uděláme vektory. Například vektor $\vec{b}$ bude od vrcholu A k vrcholu C. Jeho souřadnice dostaneme odečtením počátečního bodu od koncového:

$$\vec{b} = C - A = (2-1,\ 1-(-1),\ 9-0) = (1,2,9)$$

A hned je zahodíme, protože je nebudeme potřebovat. Vektory $\vec{a}$ a $\vec{c}$ ovšem potřebovat budeme.

Jsou ale vždy 2 způsoby, jak přejít od strany a (c) k vektoru $\vec{a}$ ($\vec{c}$). Který bod bude koncový a který počáteční? Zpět k obrázku! Počítat budeme úhel β. Tak snad každý už vidí, že ve vrcholu B budou mít ty vektory prdelky. Nebo opačně formulováno - budou mít bod B v ... - budou na něm sedět a body A a C budou jejich hlavičky.

Nuže:

$$\vec{a} = C - B = (2-(-3),\ 1-1,\ 9-1) = (5,0,8),$$
$$\vec{c} = A - B = (1-(-3),\ -1-1, 0-1) = (4,-2,-1).$$

Odpovídám na první otázku: Do následujícího vzorce

$$\beta = \arccos\left(\frac{a_1 c_1 + a_2 c_3 + a_3 c_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\right)$$

Nazpaměť se ten vzorec neučte. Ani do taháku si ho nemusíte psát. Vychází z důležitějšího vzorce pro skalární součin, který byste znát měli:

$$\boxed{\vec{a} . \vec{c} = \|\vec{a}\| . \|\vec{c}\| . \cos\beta}$$

pozn.: Obvykle ten vzorec vypadá takto: $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos\varphi}$

Když ten vzorec vezmeme jako rovnici, kterou vydělíme těmi velikostmi, dostaneme:

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{c}}{\|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{c}\|}\,.$$

Zbývá udělat arccos:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{c}}{\|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{c}\|}\right),$$

což přepsáno do souřadnic (nahoře vzoreček pro skalární součin, dole dvakrát vzoreček pro velikost (normu) vektoru) to dává výše na zvýrazněné řádce uvedený vzorec, do kterého teď dosadíme:

$$\beta = \arccos\left(\frac{5.4+0.(-2)+8.(-1)}{\sqrt{5^2+0^2+8^2}\,.\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{20-8}{\sqrt{89}\,.\sqrt{21}}\right) \doteq$$

$$\doteq 73{,}8846° \doteq \underline{\underline{74°}}$$

Tedy varianta (E)

---

5. Jsou dány matice P typu 3×2 a Q typu 2×3. Určete jakého typu bude matice Q ×(3P - 2Q^T).
(A) 2×2 (B) 3×3 (C) 2×3 (D) 3×2
(E) žádný z uvedených.

---

1) Operace číslo krát matice nemá žádné požadavky na řád matice. Výsledná matice je stejného řádu jako matice zadaná.
2) Sčítat a odečítat můžeme pouze matice stejného řádu. Výsledná matice má samozřejmě také ten samý řád.
3) Transpozice matice udělá z řádků sloupce a ze sloupců řádky, takže otočí řád řekněme takto: $m\times n \rightarrow n\times m$.
4) Násobit matice mezi sebou můžeme jedině, když první má stejně sloupců jako druhá řádků. Výsledek má tolik řádků, kolik jich má ta první (vlevo od symbolu násobení), a tolik sloupců, kolik jich má ta druhá (vpravo od symbolu pro násobení, ať už ten symbol vypadá jakkoliv - já jsem zvyklý na ×).
Jako poučka se to zapisuje takovouhle šifrou:

$(m\times \boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{p}\times n) = (m \times n)$.

Vyplývá to přímo z postupu násobení matic. kdo v tom má guláš může se podívat na blikací demonstrační příklad násobení matic.

Pokud se chceme dobrat výsledku tohoto příkladu, musíme vyjít od operace, která má přednost před všemi ostatními a postupovat zevnitř všech možných viditelných i neviditelných závorek směrem ven. Pokud bychom tedy měli zadané ty matice a chtěli spočítat výslednou matici, ze všeho nejdříve bychom udělali tu transpozici, pak obojí násobení maic čísly, potom bychom odečetli, co je v závorce, nakonec bychom vynásobili matici Q s výslkem té závorky (což je také matice).

Tento postup budeme také sledovat, ale místo samotného počítání pouze zkonstatujeme, jakého řádu by byl výsledek.

Takže:

Q je řádu 2×3, tudíž Q^T je řádu opačného, tj. 3×2,
což je dobře, protože násobení matic čísly nikdy jejich řád nezmění, tudíž řád matice $3P$ zůstává 3×2 a u matice $2Q^T$ rovněž 3×2 a my je můžeme odečíst.
Výsledek toho rozdílu, tedy ta závorka bude zase matice řádu 3×2.

To je zase dobře, protože tak lze násobit matici Q řádu (2×3) s tou závorkou, což v takové té šifře vypadá takto:

(2×**3**) × (**3**×2) = bereme krajní čísla celého výrazu před rovnítkem (2×2).

A to je náš výsledek (2×2), neboli (A).

---

6. Určete počet chyb ve výsledku násobení matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -2 & 11 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) více než 3

Vynásobte si sami, pak se koukněte na moje násobení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+2.1+3.(-1) & 1.2+2.3+3.1 & 1.1+2.0+3.2 \\ 1.1+(-1).1+0.(-1) & 1.2+(-1).3+0.1 & 1.1+(-1).0+0.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2-3 & 2+6+3 & 1+6 \\ 1-1 & 2-3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teď to porovnáme:

$$\begin{pmatrix} \cancel{-2} & 11 & \cancel{9} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ... 2 chyby ... (C)

---

7. Pro zadané matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ najděte řešení maticové rovnice $2A^T - X = B.A$.

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$ (E) žádná z uvedených matic

---

Výklad k této problematice je/bude na samostatné stránce o maticových rovnicích.

Řešení:

Napřed vyřešíme v písmenkách:

$2A^T - X = B \times A \qquad / -2A^T$

$-X = B \times A - 2A^T \qquad / (-1).$

$X = (-1).(B \times A) + 2A^T$

Teď dosadíme (a sice pěkně postupně):

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.1 & 1.2-1.1 \\ 3.1+0.1 & 3.2-0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(-1).(B \times A) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$2.A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X = (-1).(B \times A) + 2A^{T} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$, to je (D).

---

8. Pro zadanou matici $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete její mocninu M^4.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (E) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Budeme násobit a násobit a násobit.

1) $$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1.+1.1 & 1.1+1.0 \\ 1.1+0.1 & 1.1+0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+1.1 & 2.1+1.0 \\ 1.1+1.1 & 1.1+1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $$M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1+2.1 & 3.1+2.0 \\ 2.1+1.1 & 2.1+1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(D) je správně.