JčU - Cvičení z matematiky pro zemědělské obory (doc. RNDr. Nýdl, CSc & spol.)

Minitest MT2

1. Lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1$ = (3,5,-2,0), $\vec{v}_2$ = (-1,7,13,-3), $\vec{v}_3$ = (1,0,-2,3) s koeficienty $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = -1$ je
(A) (-8,-11,-41,5) (B) (8,11,-41,6) (C) (8,-11,-41,6)
(D) (-8,-11,41,-6) (E) žádný z uvedených

Lineární kombinace dvou a více vektorů je to, co dostaneme, když ty vektory vynásobíme nějakými čísly a výsledky sečteme. Těm číslům se někdy říká koeficienty. Můžou být každý jiný, ale můžou být i stejné. Můžou to být většinou i nuly. Když to jsou samé nuly, pojmenovává se obvykle taková lineární kombinace vektorů cizím slovem *triviální*. Výsledkem triviální lineární kombinace libovolného počtu jakýchkoliv vektorů vyjde vždycky nulový vektor. Je tedy zvykem, že se řekne "Dost! Od nynějška, když budeme mluvit o lineární kombinaci vektorů, budeme tím vždy myslet nějakou jinou než triviální." Více to tu nebudu rozebírat a vrátím se k příkladu.

• Lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ s koeficienty c_1, c_2, c_3 je tedy toto:

$$c_1.\vec{v}_1+c_2.\vec{v}_2+c_3.\vec{v}_3$$

Dosadíme a tím vyřešíme zadaný příklad:

$$c_1.\vec{v}_1+c_2.\vec{v}_2+c_3.\vec{v}_3 = 2.(3, 5, -2, 0) + (-3).(-1, 7, 13, -3) + (-1).(1, 0, -2, 3) =$$

$$= (6, 10, -4, 0) + (3, -21, -39, 9) + (-1, 0, 2, -3) =$$

$$= (6 + 3 - 1, 10 - 21 + 0, -4 - 39 + 2, 0 + 9 - 3) =$$

$$= (8, -11, -41, 6),$$

což je možnost (C).

```
2. Kolik z následujících čtyřech souborů vektorů je lineárně nezávislých?
S1: (1,0,1), (2,0,3), (-1,0,0),
S2: (-3,2,1), (0,0,4), (0,-1,0),
S3: (-1,1,0), (1,0,5), (0,-3,6),
S4: (1,1,1),(1,-1,0), (0,0,9)
(A) 0,   (B) 1,   (C) 2,   (D) 3,   (E) všechny
```

Upozornění: Zařadil jsem sem celkem rozsáhlé vysvětlování. Proto je zde odkaz vedoucí přímo na výpočet příkladu.

Vektory jsou lineárně závislé, když jeden z nich je lineární kombinací těch ostatních. *(Lineární kombinace je vysvětlená v předchozím příkladě.)* Nezáleží to samozřejmě na tom, který z nich si vybereme jako ten "referenční", protože když by třeba vyšlo, že $\vec{w}$ je takovouhle lineární kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\vec{w}=3\vec{u}+2\vec{v},$$

byla by to vlastně rovnice, kterou můžeme upravit třeba takto:

$$\vec{w}-3\vec{u}=2\vec{v}$$

a dále takto:

$$\frac{1}{2}\vec{w}-\frac{1}{2}.3\vec{u}=\vec{v},$$

neboli $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{w}-\frac{3}{2}\vec{u}$. A tento vztah nám říká, že vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{w}$ a $\vec{u}$.

Také se dá říci, že **vektory jsou lineárně závislé, když nějaká jejich netriviální lineární kombinace dává nulový vektor**. Což je totéž jako původní definice, protože (teď nemáme konkrétní koeficienty, ale nějaká blíže neurčená čísla c_1 a c_2) když $\vec{w}=c_1\vec{u}+c_2\vec{v}$, je to zase rovnice. A ta se dá upravit na: $\vec{o}=c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+(-1)\vec{w}$. $\vec{o}$ vlevo jsme dostali odečtením $\vec{w}-\vec{w}$ a je to nulový vektor. Vpravo od rovnítka je $c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+(-1)\vec{w}$, což je lineární kombinace vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, kde c_1, c_2 jsou čísla - nevíme jak velká, klidně to můžou být nuly. Ale třetí ten koeficient je mínus jednička, a to určitě nula není. Proto jde o netriviální lineární kombinaci.

V podstatě tedy už víme hned o dvou metodách, jak tenhle příklad řešit.

Ukazuju první z nich na souboru S_1:

Jestli jsou vektory (1,0,1), (2,0,3) a (-1,0,0) lineárně závislé, tak třeba vektor (1,0,1) je lineární kombinací vektorů (2,0,3) a (-1,0,0). **Koeficienty té lineární kombinace** pojmenuju a, b a **budu se** je **snažit najít**. Bude to vypadat takto:

(1,0,1) = ***a***.(2,0,3) + ***b***.(-1,0,0)

Rozepíšu to po složkách:

$1 = a.2 + b.(-1)$
$0 = a.0 + b.0$
$\underline{1 = a.3 + b.0}$

Když taková *a* a *b* najdu, odpověď zní: **Jsou lineárně závislé. Když taková čísla *a* a *b* neexistují,** znamená to, že **vektory v souboru jsou lineárně nezávislé**.

Prostřední rovnice platí pro každá dvě čísla. Nic nám tedy neříká. Poslední rovnici lze přepsat na:

$1 = a.3$, tedy: $a=\frac{1}{3}$.

To dosadíme do první rovnice:

$$1=\frac{1}{3}.2-b \quad / +b\text{, roznásobit čísla}$$

$$1+b=\frac{2}{3} \quad / -1$$

$$b=\frac{2}{3}-1 \;=\; \frac{2}{3}-\frac{3}{3} \;=\; -\frac{1}{3}$$

Našli jsme taková čísla. Sami si můžete udělat zkoušku, že platí:

$$(1,0,1) = \frac{1}{3}(2,0,3) - \frac{1}{3}(-1,0,0).$$

To tedy znamená, že S_1 je lineárně závislý soubor vektorů.

Druhá možnost by byla podobná: **Udělat obecnou lineární kombinaci zadaných vektorů, položit ji rovnu nule,** rozepsat po souřadnicích, **čímž se dostane soustava rovnic pro jednotlivé koeficienty. Když řešením soustavy jsou samé nuly, jsou vektory nezávislé, když vyjde** aspoň jedna **nenula,** znamená to, že **jsou závislé.**

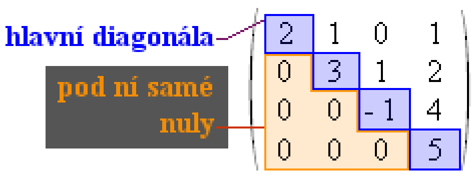
Pro soubor S_2 by to bylo takhle:

$$\boldsymbol{a}.(-3,2,1) + \boldsymbol{b}.(0,0,4) + \boldsymbol{c}.(0,-1,0) = \vec{o} \qquad \sim \qquad / \text{ ...rozepsat}$$

$$\begin{array}{rl} & a.(-3) + b.0 + c.0 = 0 \\ \sim & a.2 + b.0 + c.(-1) = 0 \\ & \underline{a.1 + b.4 + c.0 = 0} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} -3a + 0 + 0 = 0 \\ 2a + 0 - c = 0 \\ \underline{a + 4b + 0 = 0} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} -3a = 0\text{, tj.: } \boldsymbol{a = 0} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2.0 - c = 0\text{, tj.: } \boldsymbol{c = 0} \\ \text{a dále: } 0 + 4b = 0\text{, tj.: } \boldsymbol{b = 0} \end{array}$$

Vyšlo $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. To znamená, že S_2 je lineárně nezávislý soubor vektorů.

Je ale ještě třetí způsob. Všechny způsoby spolu souvisí a jsou to všechno v podstatě různá schémata pro totéž, ačkoliv to tak nevypadá. Kdybyste třeba takových příkladů počítali prvním nebo druhým způsobem stopadesát, už při dvacátém byste přestali psát písmenka, protože je nepotřebujete vidět, stačí si je pouze představovat, stejně jsme si je tam přimysleli a ve všech příkladech můžou být stejná. Podtrhávání soustavy rovnic také není nezbytné, rovnítka se dají rovněž vypustit atd. Najednou byste zjistili, že máte na papíře spíše něco jako matice. A taky že jo! Od soustav rovnic se dá přejít k maticím. (To bude téma jednoho z následujících minitestů.) **Sčítací metodě řešení soustav rovnic odpovídá Gausova eliminace, při které se snažíme**
1) násobením řádku nějakým nenulovým číslem,
2) sčítáním řádků,
3) výměnou řádků
převést matici na spodní trojúhelníkovou, například takovou:



Tato **třetí metoda** se provádí takto:

- ♠ Jednotlivé zadané vektory přepíšeme do řádků matice,
- ♥ provádíme úpravy na řádcích (Gausovu eliminaci),

♣ jakmile úpravami dospějeme k nulovému řádku, končíme s tím, že jsou vektory lineárně závislé (pozor, je to včetně toho posledního řádku).
♦ Když jsme u cíle - spodní trojúhelníkové matice - a všechny řádky mají alespoň jedno nenulové číslo, jsou vektory lineárně nezávislé.

Výsledek může vypadat třeba takto:
Obrázek: Výsledek Gausovy eliminace - v řádcích jsou souřadnice navzájem lineárně nezávislých vektorů.

$$\begin{pmatrix}1&4&7&2\\0&5&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Hlavní diagonála, rozhodující ale je, že vyšly samé nenulové vektory v dané trojúhelníkové matici.

Nebo takto, když vyjdou lineárně závislé vektory:

$$\begin{pmatrix}2&3&7&1\\0&2&1&-2\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Existuje **osvědčená strategie úprav**. Probereme si ji.
Vezmeme pro jednoduchost takovouto matici:

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-2&4\\5&7&9\end{pmatrix}\sim$$

Nejprve **vyměníme řádky** tak, **abychom měli v levém horním rohu jedničku**. Zde nemáme vhodný řádek, ale prostřední řádek lze vydělit dvojkou (vynásobit jednou polovinou) tak, že vyjdou celá čísla. To uděláme, protože to může zjednodušit další počítání.

$$\sim\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\\5&7&9\end{pmatrix}\sim$$

Teď tedy prohodíme první dva řádky, abychom měli jedničku na pouzici 1,1. **Další krok je obstarat si nuly v prvním sloupci kromě** té **pozice 1,1**:

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&0\\5&7&9\end{pmatrix}\overset{-3x}{\sim}{}^{*}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-6\\5&7&9\end{pmatrix}\overset{-5x}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-6\\0&12&-1\end{pmatrix}\sim$$

A to je vlastně všechno, protože teď jakoby **zapomeneme na první řádek a první sloupec, na ten zbytek použijeme ten samý postup**. Doufám, že jste už pochopili, proč je výhodná ta jednička vlevo nahoře (velmi jednoduše se pak najdou čísla, kterými ten řádek máme násobit před přičtením ke zpracovávaným řádkům). Protože druhý a třetí řádek začínají soudělnými čísly, není v našem případě třeba vyrábět jedničku na pozici 2,2.

* Poznamenávám, že při Gausově eliminaci násobíme řádek nějakým číslem prakticky vždy proto, že máme za lubem ho pak výhodně sečíst s jiným řádkem a pak zase tím číslem vydělit. Tyto operace tedy rovnou spojuju a přičítám třeba -3 násobek 1. řádku k řádku druhému a první nechávám, jak je, což naznačuju výmluvným způsobem.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -6\\ 0 & 12 & -1\end{pmatrix}\overset{-3x}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 17\end{pmatrix}$$

A jsme u cíle. Výsledek by byl, že vektory (v řádcích matice) jsou lineárně nezávislé.

Vysvětlování by stačilo, dáme se do **počítání příkladu**. Touto metodou předvedu celý příklad, přestože jsme už dříve něco spočítali.

S_1: (1,0,1), (2,0,3), (-1,0,0) ~

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{-2x}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{+}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{-}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

⇒ lineárně závislý soubor vektorů.

S_2: (-3,2,1), (0,0,4), (0,-1,0) ~

$$\sim\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$ ⇒ lineárně nezávislý soubor vektorů.

S_3: (-1,1,0), (1,0,5), (0,-3,6) ~

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}\overset{+}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}\overset{+3x}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 21\end{pmatrix}$$

⇒ lineárně nezávislý soubor vektorů.

S_4: (1,1,1), (1,-1,0), (0,0,9) ~

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\overset{-}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$ ⇒ lineárně nezávislý soubor vektorů.

Lineárně nezávislé vyšlo třikrát, to je možnost (D).

---

3. Kolik ze čtyřech vektorů $\vec{m}$ = (3,2,5), $\vec{n}$ = (5,6,7), $\vec{p}$ = (1,0-1), $\vec{r}$ = (0,-1,3) patří do lineárního obalu S: (1,3,2), (2,-1,3)?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(E) všechny 4

Poznámka: Chápu, že mé vysvětlování nemusí každému přijít zrovna záživné, proto lze přejít rovnou k výpočtu.

Všem, kteří nalistovali pouze tento příklad, protože zrovna v tomto nemají jasno, doporučuji, aby si napřed prošli předchozí příklady 1 a 2. A to protože je to jinými slovy v podstatě totéž. **Lineární obal nějaké skupiny** (množiny, party - jak chcete) **vektorů je množina všech možných lineárních kombinací vektorů z té skupiny** (množiny, party - jak chcete). Zda je nějaký vektor lineární

kombinací jiných vektorů se můžeme dozvědět třemi [způsoby]() popsanými ve výkladu k [druhému příkladu]() tak, že ten **zkoumaný vektor k té původní sadě přidáme a vyzkoušíme, zda jsou všechny tyto vektory lineárně závislé**. Má to jeden háček, **aby to fungovalo, musí být ta původní sada lineárně nezávislá**. Pokud by byla lineárně závislá, museli bychom z ní vybrat co do počtu maximální skupinu lineárně nezávislých vektorů a tu pak použít jako naši referenční sadu, ke které budeme zkoumané vektory přidávat.
Konkrétněji:

Zde máme zadané celkem 4 vektory ($\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{r}$), které máme zkoumat. K tomu máme ještě dva další vektory, vůči kterým je máme zkoumat - jsou to vektory z toho *S*. Ty jsou navzájem lineárně nezávislé, to je hned vidět, protože jeden není násobkem druhého. Vezmeme tedy
1) vektory skupiny *S*, přidáme k nim vektor $\vec{m}$ a zjistíme, zda tyto tři jsou lineárně závislé. **Pokud ano, pak $\vec{m}$ patří do lineárního obalu *S*. Pokud ne, tak tam nepatří.**
2) Vezmeme oba vektory souboru *S*, přidáme k nim vektor $\vec{n}$, zjistíme, zda tyto 3 vektory jsou lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, patří $\vec{n}$ do lineárního obalu *S*. Pokud jsou lineárně nezávislé, tak tam nepatří.
3) a 4) Totéž provedeme s vektory $\vec{p}$ a $\vec{r}$.
Teď ještě maličkost: zjistit, zda jsou 3 vektory lineárně závislé nebo ne. Tentokrát si nebudeme komplikovat život rovnicemi a vezmeme to rovnou Gausovou eliminací.
Než se do toho ale pustíme, řekneme si zkratku pro jiné příklady tohoto typu. Zkratka spočívá v tom, že např. čtyři trísložkové vektory nemůžou být lineárně nezávislé a nemělo by smysl to ani počítat. Stejně tak neexistují tři lineárně nezávislé dvousložkové vektory. Obecně bych to shrnul asi takto: Lineárně nezávislých vektorů nemůže být více, než kolik mají složek. Proto, pokud bychom v souboru *S* měli třeba tři lineárně nezávislé trísložkové vektory, pak by už nutně každý další trísložkový vektor patřil do jejich lineárního obalu.
Na to byste ale jistě přišli i sami, pokud byste zkusili jeden takový příklad vypočítat. Celé to vyplývá z tvaru té [spodní trojúhelníkové matice]() - v druhém řádku je na začátku jedna nula, ve třetím dvě, a tak dále vždy v dalším řádku o jednu nulu na začátku více. Pokud jsme u víctého řádku, než kolik má matice sloupců, nezůstává nám už v řádku žádné místo pro nic jiného než jsou nuly. Takže u matice, která je vyšší než širší vždycky musí vyjít, že její řádky jsou lineárně závislé.

Takové štěstí, že by to šlo bez počítání tady ale nemáme, nuž použijeme [dar přítele Gause]():

$\vec{m}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{-3\times}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{-2\times}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} \overset{-}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vyšel nulový řádek, to znamená, že vektory jsou lineárně závislé, to dále znamená, že první vektor původní matice patří do lineárního obalu zbývajících dvou - samozřejmě s přihlédnutím k lineární nezávislosti těchto dvou zbývajících.

$\vec{n}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle -5\times} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle :(-9)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle -2\times} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} {\scriptstyle +7\times} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lineárně nezávislé, tzn. $\vec{n}$ nepatří do lineárního obalu *S*.

$\vec{p}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle -} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle -2\times} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} {\scriptstyle :3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} {\scriptstyle +} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lineárně nezávislé, tzn. $\vec{p}$ nepatří do lineárního obalu *S*.

$\vec{r}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} {\scriptstyle -2\times} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} {\scriptstyle -7\times} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -22 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ lineárně nezávislé, tzn. $\vec{r}$ nepatří do lineárního obalu *S*.

Ze zadaných vektorů vyšel pouze vektor $\vec{m}$, že patří do lineárního obalu *S*. Správně je tedy možnost (B).

---

4. Dány tři matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Určete, který z níže uvedených vztahů o hodnostech platí.

(A) h($A.B$) = h($C.A$) < h($A.C$)
(B) h($A.B$) < h($C.A$) < h($A.C$)
(C) h($A.B$) = h($A.C$) < h($C.A$)
(D) h($A.B$) < h($A.C$) = h($C.A$)
(E) žádný z uvedených vztahů neplatí

Hodnost matice je nejjednodušeji vzato počet lineárně nezávislých řádků v té matici. Hodnost matice tedy dostaneme tak, že uděláme Gausovu eliminaci a ve výsledné matici spočítáme nenulové řádky.

Znovu opakuji, že matice nemůže mít více lineárně nezávislých žádků než sloupců, což někdy ušetří počítání.
Dále poznamenávám, že dva řádky jsou lineárně závislé, když je jeden z nich násobkem druhého, což bývá vidět na první pohled.

Příklad by to byl tedy jednoduchý, až na to, že v závorkách jsou vždy matice dvě. Vlastně ne, vlastně je to vždy pouze jedna matice, kterou si musíme napřed vyrobit vynásobením těch dvou.

A tím také začneme - vynásobením matic dle zádání:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.0 \\ 1.1-1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+0.1 & 1.1+0.(-1) \\ 0.1-1.1 & 0.1-1.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.0 & 1.0+1.(-1) \\ 1.1-1.0 & 1.0-1.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teď vyřešíme hodnosti.
Matice $A \times B$ má dva stejné řádky. Ty jsou tedy lineárně závislé. Hodnost této matice je tudíž méně než 2. Jsou 2 možnosti: buď 0 nebo 1. Nulovou hodnost má pouze nulová matice. O tu zde nejde, proto je:

$$\mathrm{h}(A \times B) = 1$$

S maticí $C \times A$ je to úplně stejné - má 2 stejné nenulové řádky, a tudíž hodnost rovnu jedné.

$$\mathrm{h}(C \times A) = 1$$

Matice $A \times C$ má naopak dva různé nenulové řádky a proto také

$$\mathrm{h}(A \times C) = 2$$

Jestli jste zklamáni tím, že jsem nakonec nedělal tu Gausovinu, kterou jsem na začátku sliboval, tak dobrá, vy nevděčníci - jen kvůli Vám - dívejte se dál:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{h}(A \times B) = 1$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{h}(C \times A) = 1$$

$$A \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{h}(A \times \mathrm{C}) = 2$$

Vyšlo totéž. Ještě porovnáme výsledky:

$\mathrm{h}(A \times B) = \mathrm{h}(C \times A) < \mathrm{h}(A \times \mathrm{C})$, což je hned ta první možnost (A).

---

5. Jsou dány matice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hodnost matice $P{\times}Q$ je

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Podobně jako v předchozím příkladu napřed vynásobíme, potom upravujeme, abychom zjistili hodnost.

$$P{\times}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+8 & 2+10 & -1-12 & 8 & 5+2 \\ -18-20 & -6-4-25 & 3+12+30 & -24+28 & -15+36-5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 12 & -13 & 8 & 7 \\ -38 & -35 & 45 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times 19 \\ \times 7 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 266 & 228 & -247 & 152 & 133 \\ -266 & -245 & 315 & 28 & 112 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 266 & 228 & -247 & 152 & 133 \\ 0 & -17 & 68 & 180 & 245 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{h}(P{\times}Q) = \underline{\underline{2}}\text{, takže možnost (B).}$$

---

6. Kolika numerických chyb se dopustil student Pitrásek při úpravě matice do Gausova tvaru?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

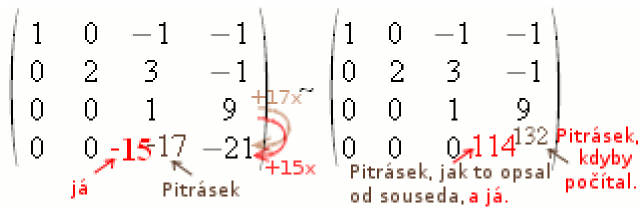
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -17 & -21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 114 \end{pmatrix}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) více než 3

Náročný příklad. V každém kroku musíme odhalit, co za tajuplnou úpravu měl student Pitrásek na mysli, pak je musíme provést znovu a tak zjistit chyby.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\times \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -4\times \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \underset{\text{já}\quad\text{Pitrásek}}{9\;10} & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}\times \\ \\ \\ \end{array} \sim$$ zařazen mezikrok:

~ 

~ a zase zpět 

Tak a teď si to rozebereme, kolik těch chyb tam vlastně je. Máme najít numerické chyby, čili asi početní. Tudíž desítka v třetí matici je chyba, sedmnáctka v těch dalších sice nesouhlasí se správným postupem, ale spočítaná je správně (z nesprávné desítky). Naproti tomu stočtrnáctka souhlasí, ale byla získána z nesprávných čísel, čili druhou početní chybou. Podle mého názoru to tedy je (C) - 2 početní chyby.

---

7. Vektor $\vec{v}$ = (23, -19, 6) je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ = (3, 4, 5), $\vec{v}_2$ = (-6, 7, 0), $\vec{v}_3$ = (8, -9, 1). Koeficienty této lineární kombinace c_1, c_2, c_3 tvoří trojici čísel:
(A) 1, 2, -1 (B) -1, 2, -1 (C) 2, 2, -1
(D) -1, -1, -1 (E) 1, -2, 1

Jak už bylo řečeno v příkladu 1 a 2, vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ a $\vec{v}_3$ s koeficienty c_1, c_2 a c_3 znamená, že:

$$\vec{v}=c_1.\vec{v}_1+c_2.\vec{v}_2+c_3.\vec{v}_3\,.$$

Toto rozepíšeme do souřadnic, dostaneme soustavu rovnic pro neznámé c_1, c_2, c_3. Tu vyřešíme a budeme mít hotovo.

Podle plánu rozepisujeme do souřadnic:

(23, -19, 6) = c_1.(3, 4, 5) + c_2.(-6, 7, 0) + c_3.(8, -9, 1) ~ každou souřadnici na extra řádek:

$$\begin{array}{lcll} 23 = c_1.3 + c_2.(-6) + c_3.8 & & 3c_1 - 6c_2 + 8c_3 = 23 & /\,.7 \\ \sim\ -19 = c_1.4 + c_2.7 + c_3.(-9) & \sim \text{ přepis} & 4c_1 + 7c_2 - 9c_3 = -19 & /\,.6 \quad \sim \\ \underline{6 = c_1.5 + c_2.0 + c_3.1} & & \underline{5c_1 \qquad\quad + c_3 = 6} & \end{array}$$

(z prvních dvou rovnic sčítací metodou vyloučíme c_2)

$$\begin{array}{lcll} 21c_1 - 42c_2 + 56c_3 = 161 & & & \\ \sim\ 24c_1 + 42c_2 - 54c_3 = -114 & \sim & 45c_1 + 2c_3 = 47 & \sim \\ \underline{5c_1 \qquad\qquad + c_3 = 6} & & \underline{5c_1 + c_3 = 6} & /\,.(-9) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} \sim\ 45c_1 + 2c_3 = 47 & & & & \\ \underline{-45c_1 - 9c_3 = -54} & \sim & -7c_3 = -7 \ /:(-7) & \sim & \underline{\underline{c_3 = 1}} \end{array}$$

Dosadíme do třetí rovnice (z těch, co vyšly na začátku) c_3 = 1 a dostaneme:

$5c_1 + 1 = 6$ / -1
$5c_1 = 5$ / :5
$\underline{\underline{c_1 = 1}}$

Nakonec dosadíme třeba do první rovnice $c_1 = 1$ a $c_3 = 1$:

$3.1 - 6c_2 + 8.1 = 23$

$3 - 6c_2 + 8 = 23$

$11 - 6c_2 = 23$ / - 11

$-6c_2 = 12$ / :(-6)

$\underline{\underline{c_2 = -2}}$

Výsledky sepíšeme: $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$, což je možnost (E).
